МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОУ ВПО «СИБИРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ»

Н.Б. Лесных

ТЕОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Теория ошибок измерений

Утверждено редакционно-издательским советом академии
в качестве учебного пособия для студентов
геодезических специальностей

Новосибирск
СГГА
2010

УДК 528.1
Л11

Рецензенты:
кандидат технических наук, профессор СГГА
А.Г. Неволин

кандидат технических наук, доцент СГГА
А.Г. Барлиани

Лесных, Н.Б.
Л11 Теория математической обработки геодезических измерений. Теория ошибок измерений [Текст]: учеб. пособие / Н.Б. Лесных. – Новосибирск.: СГГА, 2010. – 43 с.

ISBN 978-5-87693-358-4

Учебное пособие «Теория математической обработки геодезических измерений. Теория ошибок измерений» – курс лекций по теории математической обработки геодезических измерений (ТМОГИ). Содержит краткое изложение вопросов теории ошибок геодезических измерений и является дополнением к изданному ранее учебному пособию «Теория математической обработки геодезических измерений. Метод наименьших квадратов». Предназначено для студентов геодезических специальностей, дипломников и аспирантов СГГА. Рекомендовано к изданию Ученым советом Института геодезии и менеджмента.

Ответственный редактор – кандидат технических наук, профессор СГГА
В.А. Падве

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГГА

УДК 528.1

ISBN 978-5-87693-358-4

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЗАДАЧИ ПРЕДМЕТА

Любые измерения сопровождаются ошибками. Задачами предмета «Теория ошибок измерений» являются:

1) изучение законов возникновения и распределения ошибок измерений и вычислений;
2) оценка точности результатов измерений; установление допусков – критериев, указывающих на наличие грубых ошибок измерений;
3) оценка точности функций измеренных величин;
4) предрасчет ожидаемой точности измерений;
5) математическая обработка результатов многократных измерений одной величины.

2. ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ. СВОЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Истинной ошибкой измерения называется отклонение результата измерения x_i от его истинного значения X.

$\theta_i = x_i - X$ (1)

– истинная ошибка результата измерения.

Из множества элементарных ошибок, составляющих в сумме общую ошибку измерения, выделяют две основные категории ошибок: случайные Δ_i и систематические δ. К правой части формулы (1) прибавим и отнимем математическое ожидание M_X:

$\theta_i = (x_i - M_x) + (M_x - X) = \Delta_i + \delta$.

Обозначим:

$(x_i - M_x) = \Delta_i$ (2)

– случайная ошибка измерения (случайная составляющая истинной ошибки);

$(M_x - X) = \delta$ (3)

– систематическая ошибка измерения (систематическая составляющая).

Из определения (2) следует, что математическое ожидание случайной ошибки равно нулю

$M(\Delta) = M(x_i - M_x) = 0$.

Математическое ожидание систематической ошибки отлично от нуля, $M(\delta) = \delta$.

По характеру действия систематические ошибки бывают постоянные, сохраняющие знак и величину; односторонне действующие, сохраняющие только знак; функциональные, меняющиеся по какому-либо закону.

Учет влияния той или иной систематической ошибки изучается в специальных дисциплинах. Систематические ошибки, по возможности, исключают введением поправок или организацией соответствующей методики измерений.

В измерениях могут появляться грубые ошибки. Они возникают вследствие неисправности измерительного прибора, просчетов наблюдателя, сбоев в передаче по каналам связи и т. п. Грубые ошибки следует выявить и исключить из результатов измерений.

Считают, что случайные ошибки измерений подчиняются нормальному закону распределения с параметрами: математическим ожиданием $M(\Delta) = 0$ и средним квадратическим отклонением σ_Δ. Нормальная кривая с такими параметрами распределения носит название кривой Гаусса.

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma_\Delta \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma_\Delta^2}} \qquad (4)$$

– плотность нормального распределения случайной ошибки измерения.

При большом числе измерений случайные ошибки обнаруживают свойства, которые определяются свойствами нормальной кривой (4).

1. Для ряда результатов измерений с известным законом распределения абсолютные величины случайных ошибок с заданной вероятностью P не превзойдут определенного предела.

Для нормального закона распределения

$P(|\Delta| < \sigma) = 0{,}683$;

$P(|\Delta| < 2\ \sigma) = 0{,}954$;

$P(|\Delta| < 3\ \sigma) = 0{,}997$.

2. Положительные и отрицательные случайные ошибки, равные по абсолютной величине, равновозможны

$P(\Delta < 0) = P(\Delta > 0) = 0{,}5$.

3. Малые по абсолютной величине случайные ошибки измерений встречаются чаще, чем большие

$P(|\Delta| < \sigma) = 0{,}683$; $P(\sigma \le |\Delta| < 2\ \sigma) = 0{,}271$; $P(2\ \sigma \le |\Delta| < 3\ \sigma) = 0{,}043$.

4. Математическое ожидание случайной ошибки измерения равно нулю: $M(\Delta) = 0$. На практике оно пренебрегаемо мало отличается от нуля. Среднее арифметическое случайных ошибок измерений по вероятности стремится к нулю с увеличением числа измерений:

вер. $\lim [\Delta] / n = 0$.

$n \to \infty$

Применение критериев математической статистики – равенства вероятностей (для проверки первых трех свойств) и равенства средних (при проверке четвертого свойства) [6] позволяют сделать обоснованные вероятностные выводы относительно выполнения того или иного свойства.

3. СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ

Основной характеристикой точности измерений в геодезии является ***средняя квадратическая ошибка*** m. Точное значение средней квадратической ошибки определяется формулой

$$m^2 = M(\theta^2). \qquad (5)$$

Квадрат средней квадратической ошибки равен математическому ожиданию квадрата истинной ошибки результата измерения.

В случае равноточных измерений, т. е. измерений, выполненных в одинаковых условиях, средняя квадратическая ошибка может быть вычислена по формулам Гаусса:

$$m = \sqrt{\frac{[\theta^2]}{n}}, \qquad (6)$$

где $[\theta^2] = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_n^2$,

или

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \qquad (7)$$

(во втором случае (7) – это оценка среднего квадратического отклонения $\overline{\sigma}_x$). По формуле Бесселя

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}, \qquad (8)$$

где $v_i = \bar{x} - x_i$ – поправки,

$\bar{x} = [x]/n -$ среднее арифметическое из результатов измерений.

$$m_m = m/\sqrt{2r} \qquad (9)$$

– средняя квадратическая ошибка определения m.

Здесь r – число степеней свободы.

$r = n$, если средняя квадратическая ошибка определяется по формулам (6), (7);

$r = n - 1$ для формулы (8).

Если число ошибок $n = 50$, относительная ошибка $m_m/m = 10$ %.

Пример

По данным табл. 1 определите среднюю квадратическую ошибку округления.

Таблица 1. Вычисление средней квадратической ошибки

X	x	θ	θ^2
10,5	10	–0,5	0,25
10,7	11	0,3	0,09
15,8	16	0,2	0,04
16,1	16	–0,1	0,01
18,4	18	–0,4	0,16

$[\theta^2] = 0{,}55$

$$m = \sqrt{\frac{[\theta^2]}{n}} = 0{,}33$$ (единицы последнего разряда числа x).

Исследуем влияние систематической ошибки на величину средней квадратической:

$$m^2 = M(\theta^2) = M(\Delta + \delta)^2 = M(\Delta^2 + 2 \cdot \Delta \cdot \delta + \delta^2) = M(\Delta^2) +$$

$$+\ 2 \cdot M(\Delta) \cdot M(\delta) + M(\delta^2) = M(\Delta^2) + M(\delta^2),\ \text{так как}\ \ M(\Delta) = 0.$$

$m = \sqrt{m_\Delta^2 + m_\delta^2} = \sqrt{m_\Delta^2 + \delta^2}$ характеризует совместное влияние случайных и систематических ошибок измерений.

Если принять $m_\delta = m_\Delta / 3$, то $m = \sqrt{m_\Delta^2 + m_\Delta^2 / 9} = m_\Delta \sqrt{1{,}11} = 1{,}05 \cdot m_\Delta$.

Это означает, что если пренебречь $m_\delta = m_\Delta / 3$, ошибка определения m составит всего 5 %.

4. СРЕДНЯЯ, ВЕРОЯТНАЯ И ПРЕДЕЛЬНАЯ ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ. ИХ СВЯЗЬ СО СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКОЙ

Средняя ошибка ϑ – это еще один возможный критерий точности измерений в геодезии. Средней ошибкой называется математическое ожидание абсолютных значений случайных ошибок измерений.

$$\vartheta = M\left|\Delta\right|. \qquad (10)$$

На практике значение оценки средней ошибки вычисляют как среднее арифметическое из абсолютных значений случайных ошибок

$$\overline{\vartheta} = \left[\left|\Delta\right|\right] / n. \qquad (11)$$

Установим связь между средней и средней квадратической ошибками. Предполагаем, что случайные ошибки измерений подчиняются нормальному закону распределения. Обозначим $t = \left|\Delta\right| / m$.

$$M(\left|\Delta\right| / m) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t) \cdot dt = 2/\sqrt{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} t \cdot e^{-t^2/2} \cdot dt;$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} t \cdot e^{-t^2/2} \cdot dt = -\int\limits_{0}^{\infty} de^{-t^2/2} = 1/e^{-t^2/2} \Big|_{0}^{\infty} =$$

$$= -\left\{\lim_{t \to \infty} 1/e^{-t^2/2} - \lim_{t \to 0} 1/e^{-t^2/2}\right\} = -\{0-1\} = 1;$$

$$M(\left|\Delta\right| / m) = \sqrt{2/\pi}; \quad (1/m) \cdot M(\left|\Delta\right|) = \sqrt{2/\pi}; \quad \vartheta / m = \sqrt{2/\pi};$$

$$\vartheta = 0{,}798 \cdot m; \qquad (12)$$

$$m = 1{,}25 \cdot \vartheta. \qquad (13)$$

Вероятной ошибкой ρ называется такая абсолютная величина, больше и меньше которой по абсолютной величине ошибки в ряду наблюдений равновозможны

$$P(\left|\Delta\right| \succ \rho) = P(\left|\Delta\right| \prec \rho) = \Phi(\rho / m) = 0{,}5,$$

где

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-t}^{+t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

– интеграл вероятностей.

Вследствие этого, $t_\rho = \rho / m = 0{,}674$;

$$\rho = 0{,}674 \cdot m. \qquad (14)$$

На практике оценку вероятной ошибки находят в середине ряда случайных ошибок, расположенных в порядке возрастания их абсолютных величин:

$$\left|\Delta_1\right| \prec \left|\Delta_2\right| \prec \ldots \prec \left|\Delta_{n/2}\right| \prec \ldots \prec \left|\Delta_n\right|.$$

Для n четного $\overline{\rho} = (\left|\Delta_{n/2}\right| + \left|\Delta_{n/2+1}\right|)/2$; для n нечетного $\overline{\rho} = \left|\Delta_{n/2}\right|$.

Предельная ошибка $\Delta_{пред}$ вычисляется по формуле

$$\Delta_{пред} = t_\beta \cdot m, \qquad (15)$$

где t_β – аргумент интеграла вероятностей $\Phi(t_\beta)$ в предположении о нормальном законе распределения результатов измерений. Для доверительной вероятности $\beta = \Phi(t_\beta) = 0{,}954$ $t_\beta = 2{,}0$; $\beta = \Phi(t_\beta) = 0{,}988$ $t_\beta = 2{,}5$; $\beta = \Phi(t_\beta) = 0{,}997$ $t_\beta = 3{,}0$.

Ошибки, превышающие по абсолютной величине предельную, считаются недопустимыми. Такие измерения бракуют.

Ошибки m, ϑ, ρ, Δ называются *абсолютными*. Отношение соответствующей абсолютной ошибки к полученному значению измеренной величины называется ***относительной*** ошибкой. Относительную ошибку обычно выражают в виде дроби с числителем, равным единице. Например,

$\frac{m}{x} = \frac{1}{2\,000}$ – относительная средняя квадратическая ошибка;

$\frac{\vartheta}{x} = \frac{1}{2\,500}$ – относительная средняя ошибка и т. п.

5. СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА ФУНКЦИИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ И НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ АРГУМЕНТОВ

Пусть по значениям результатов измерений x_1, x_2, …, x_n вычисляется некоторая величина – функция результатов измерений:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \qquad (16)$$

Так как измерения содержат ошибки, функция также будет иметь ошибку. Ошибка функции будет зависеть от ошибок аргументов и вида функции.

Найдем среднюю квадратическую ошибку функции *коррелированных* аргументов. Известна ковариационная матрица аргументов

$$K = \begin{pmatrix} m_1^2 & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & m_2^2 & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & m_n^2 \end{pmatrix},$$

где m_i – средние квадратические ошибки аргументов.

$$k_{i,j} = M\{(x_i - Mx_i)(x_j - Mx_j)\}$$

– корреляционный момент пары x_i, x_j, характеризующий коррелированность двух аргументов.

Обозначим $X_1, X_2, \dots, X_n$ как истинные значения аргументов.

$$\theta_i = x_i - X_i$$

– истинная ошибка аргумента.

$$\theta_F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

– истинная ошибка функции.

Среднюю квадратическую ошибку функции определим из формулы

$$m_F^2 = M(\theta_F^2). \qquad (17)$$

Для этого найдем:

1) θ_F – истинную ошибку функции;

2) θ_F^2 – квадрат истинной ошибки функции;

3) $M(\theta_F^2)$ – математическое ожидание квадрата истинной ошибки функции.

$$\theta_F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(X_1, X_2, \dots, X_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) -$$
$$- f(x_1 - \theta_1,\ x_2 - \theta_2, \dots, x_n - \theta_n).$$

Полагая, что ошибки θ_i малы по сравнению с результатами измерений x_i, рассматриваем их как приращения аргументов и выполняем разложение в ряд Тейлора, ограничиваясь линейными членами разложения:

$$\theta_F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \theta_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \theta_2 +$$

$$+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 \theta_n + R.$$

Остаточным членом разложения *R* пренебрегают.

Здесь $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0$ – значение частной производной, вычисленной по результатам измерений.

$$\theta_F = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \theta_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \theta_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 \theta_n \qquad (18)$$

– истинная ошибка функции равна сумме произведений частных производных от этой функции по каждому аргументу на истинные ошибки аргументов.

Получим θ_F^2:

$$\theta_F^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 \theta_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 \theta_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x_n}}\right)_0^2 \theta_{\mathrm{n}}^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \theta_1\theta_2 + \ldots$$

От полученного выражения возьмем математическое ожидание:

$$M(\Theta_F^2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 M(\theta_1^2) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 M(\theta_2^2) + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 M(\theta_n^2) +$$

$$+2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 M(\theta_1\theta_2) + \ldots$$

Согласно (5), (17) и (1),

$$m_i^2 = M(\theta_i^2);\ M(\theta_i \cdot \theta_j) = M\{(x_i - X_i)(x_j - X_j)\}.$$

Если систематические ошибки отсутствуют, $\delta = 0$, то $M(x) = X$, а $M(\theta_i\theta_j) = M(\Delta_i\Delta_j) = k_{i,j}$ – является корреляционным моментом. Тогда

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 m_n^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 k_{12} + \ldots}$$

(19)

– средняя квадратическая ошибка функции коррелированных аргументов.

Пример 1

Дана функция коррелированных аргументов:

$F = x_1 + 2x_2 - 3x_3$;

$$K = \begin{pmatrix} 4 & 0{,}8 & 0{,}5 \\ & 9 & 0{,}4 \\ & & 16 \end{pmatrix}$$ – ковариационная матрица аргументов.

Найти среднюю квадратическую ошибку функции m_F.

Решение

Возьмем частные производные от функции F по каждому аргументу x_i: $(\partial F/\partial x_1)_0 = 1$; $(\partial F/\partial x_2)_0 = 2$; $(\partial F/\partial x_3)_0 = –3$.

Квадраты средних квадратических ошибок аргументов – диагональные элементы ковариационной матрицы: $m^2{}_1 = 4$; $m^2{}_2 = 9$; $m^2{}_3 = 16$.

Корреляционный момент аргументов x_1 и x_2 $k_{12} = 0{,}8$. Это элемент, стоящий в первой строке и втором столбце ковариационной матрицы. Корреляционные моменты аргументов x_1 и x_3, x_2 и x_3, соответственно, $k_{13} = 0{,}5$ и $k_{23} = 0{,}4$.

Для трех аргументов формула (19) примет вид:

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_0^2 m_2^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_0^2 m_3^2 + 2\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)k_{12} + \ldots}$$

$$m_F = \sqrt{1\cdot 4 + 4\cdot 9 + 9\cdot 16 + 2\cdot 1\cdot 2\cdot 0{,}8 + 2\cdot 1\cdot(-3)\cdot 0{,}5 + 2\cdot 2\cdot(-3)\cdot 0{,}4} =$$
$$= \sqrt{179} = 13{,}4.$$

Если $k_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$, то аргументы *некоррелированы*. Формула (19) упрощается:

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 m_n^2}. \qquad (20)$$

Средняя квадратическая ошибка функции некоррелированных аргументов равна корню квадратному из суммы произведений квадратов частных производных функций по каждому аргументу на квадраты средних квадратических ошибок аргументов.

Порядок решения задачи.

1. Установить вид функции, т. е. написать формулу, по которой вычисляется оцениваемая величина (функция) через аргументы, средние квадратические ошибки которых даны в условии задачи.
2. Взять частные производные от функции по каждому аргументу (при этом остальные аргументы считаются постоянными).
3. Воспользоваться формулой (20).

Следует учесть, что размерность всех величин должна быть одинакова. Знак между слагаемыми в правой части формулы (20) всегда «плюс».

Пример 2

Вычислите среднюю квадратическую ошибку определения коэффициента нитяного дальномера, если отрезок на рейке $l = 1{,}00$ м измерен со средней квадратической ошибкой m_l = 0,5 см, а расстояние s = 100,00 м с m_S = 20 см.

Решение

Установим вид функции: c = s / l.

Возьмем частные производные по s и l:

$(\partial c/\partial s)_0 = 1/l$; $(\partial c/\partial l)_0 = -s/l^2$.

Определим среднюю квадратическую ошибку функции:

$$m_c = \sqrt{\frac{1}{l^2} m_s^2 + \left(-\frac{s}{l^2}\right)^2 m_l^2} = \sqrt{\frac{1}{10^4} \cdot 4 \cdot 10^2 + \frac{10^8}{10^8} \cdot 0{,}25} = \sqrt{0{,}29} = 0{,}54.$$

Пример 3

Определите среднюю квадратическую ошибку приращения ординаты (в буквенном виде), если известны средние квадратические ошибки определения расстояния и дирекционного угла – m_S и m_α.

Решение

Функция имеет вид:dy = S sinά.

Частные производные: $\dfrac{\partial dy}{\partial S} = \sin\alpha$; $\dfrac{\partial dy}{\partial \alpha} = S\cos\alpha$.

Средняя квадратическая ошибка приращения dy:

$$m_{dy} = \sqrt{\left(\frac{\partial dy}{\partial S}\right)_0^2 m_S^2 + \left(\frac{\partial dy}{\partial \alpha}\right)_0^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}} = \sqrt{(\sin\alpha)^2 m_S^2 + (S\cos\alpha)^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}}.$$

В этом примере средние квадратические ошибки приращения ординаты и расстояния являются линейными величинами, поэтому среднюю квадратическую ошибку m_α следует выразить в радианах (если ошибка m_α дана в минутах, то ρ´ = 3438´, если m_α дана в секундах, то ρ″ = 206265″).

Определим среднюю квадратическую ошибку **среднего арифметического**. Средняя квадратическая ошибка одного измерения равна m.

Среднее арифметическое вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Частные производные:

$$(\partial \bar{x} / \partial x_i) = 1/n.$$

Средняя квадратическая ошибка среднего арифметического –

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad (21)$$

Средняя квадратическая ошибка функций линейного вида:

1) $f = k_1x_1 \pm k_2x_2 \pm \ldots \pm k_nx_n$, $(\partial f/\partial x_i) = \pm k_i$;

$$m_f = \sqrt{k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + ... + k_n^2 m_n^2}; \qquad (22)$$

2) $f = x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$, $(\partial f/\partial x_i) = \pm 1$;

$$m_f = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + ... + m_n^2}\ ; \qquad (23)$$

Если $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$, $m_f = m\sqrt{n}$;

3) F = kx;

$m_f = km_x$. (24)

Пример 4

Угол β измерен со средней квадратической ошибкой $m_\beta = 5{,}0''$. Определите среднюю квадратическую ошибку утроенного значения угла.

Решение

Функция имеет вид: $f = 3\beta$.

По формуле (24) вычисляем $m_f = 3m_\beta = 15{,}0''$.

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНИХ КВАДРАТИЧЕСКИХ ОШИБОК АРГУМЕНТОВ ПО ЗАДАННОЙ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКЕ ФУНКЦИИ

Известна m_F – средняя квадратическая ошибка функции $F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ независимых аргументов x_i. Определить $m_1, m_2, \ldots, m_n$, т. е. с какой точностью нужно измерить аргументы, чтобы обеспечить заданную точность функции.

В формуле

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 m_n^2$$

искомых величин – n, возможно множество решений. Для получения единственного решения ставят дополнительное условие.

Принцип равных влияний. *Считают, что слагаемые правой части формулы m_F равны:*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_1^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 m_2^2 = \ldots = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 m_n^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_i^2 .$$

Тогда

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_i^2 n;$$

$$m_i = \frac{m_F}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \sqrt{n}} \qquad (25)$$

– средняя квадратическая ошибка i-го аргумента.

Принцип равных средних квадратических ошибок. *Считают, что средние квадратические ошибки аргументов равны:* $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$.

Тогда

$$m_F^2 = m^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2;$$

$$m = \frac{m_F}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2}} \qquad (26)$$

– средняя квадратическая ошибка аргумента.

Этот принцип применяют тогда, когда измерения однородны – только углы или только линии (одного порядка).

Пример

С какой точностью нужно измерить расстояние s и длину отрезка на рейке l, чтобы определить коэффициент дальномера c со средней квадратической ошибкой m_c = 0,50; s = 100 м, l = 1 м.

Решение

Функция имеет вид: $c = s / l$.

Частные производные от функции c по аргументам s и l:

$(\partial c/\partial l)_0 = – s / l^2$; $(\partial c/\partial s)_0 = 1 / l$.

Средние квадратические ошибки аргументов определяем на основе принципа равных влияний по формуле (25):

$$m_l = \frac{m_c \cdot l^2}{s \cdot \sqrt{2}} = \frac{0{,}5 \cdot 10^4}{10^4 \cdot \sqrt{2}} = 0{,}35\,\text{см};$$

$$m_s = \frac{m_c \cdot l}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}5 \cdot 10^2}{\sqrt{2}} = 35\,\text{см}.$$

7. НЕРАВНОТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

7.1. Вывод среднего весового

Измерения, выполненные в разных условиях, называются неравноточными. Их средние квадратические ошибки m_i не равны:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – результаты измерений;

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ – средние квадратические ошибки.

Требуется найти наиболее надежное значение измеренной величины. Обозначим это значение $\bar{x}$ и представим в виде линейной функции результатов измерений:

$$\bar{x} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n. \qquad (27)$$

Можно выдвинуть некоторые предварительные требования относительно вида функции (27). Эта функция не должна иметь свободного члена, т. е. $l = 0$. Иначе, при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, когда и $\bar{x} = 0$, $\bar{x}$ будет равно l.

Должно выполняться условие

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1. \qquad (28)$$

Если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$, то $\bar{x} = x \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = x$.

Найдем значение функции $\bar{x}$ под условием $m_{\bar{x}} = \min$.

$$m_{\bar{x}}^2 = \alpha_1^2 m_1^2 + \alpha_2^2 m_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 m_n^2.$$

Поставленную задачу решаем методом Лагранжа с неопределенным множителем k. Функция Лагранжа имеет вид:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 m_i^2 - 2k\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1\right) = \min;$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}\right) = 2\alpha_i m_i^2 - 2k = 0.$$

Отсюда

$$\alpha_i = \frac{k}{m_i^2}. \qquad (29)$$

Подставив (29) в (28), найдем

$$k = \frac{1}{\left[\frac{1}{m^2}\right]}. \qquad (30)$$

Подставив (30) в (29), получим

$$\alpha_i = \frac{\dfrac{1}{m_i^2}}{\left[\dfrac{1}{m^2}\right]}. \qquad (31)$$

В результате подстановки (31) в (27) имеем:

$$\bar{x} = \frac{\dfrac{1}{m_1^2} x_1 + \dfrac{1}{m_2^2} x_2 + \ldots + \dfrac{1}{m_n^2} x_n}{\left[\dfrac{1}{m^2}\right]}. \qquad (32)$$

Для упрощения формулы (32) умножим ее числитель и знаменатель на коэффициент c. Обозначим

$$p_i = \frac{c}{m_i^2} \qquad (33)$$

– вес результата измерения.

Формула (32) примет вид:

$$\bar{x} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{[p]} = \frac{[px]}{[p]} \qquad (34)$$

– среднее весовое.

В частном случае, для равноточных измерений $p_i = 1$; $[p] = n$. Среднее весовое превращается в среднее арифметическое:

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}. \qquad (35)$$

7.2. Вес результата измерения

При совместной обработке неравноточных измерений вводят относительные показатели точности – ***веса*** результатов измерений.

Вес – положительное число, обратно пропорциональное квадрату средней квадратической ошибки:

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}, \qquad (36)$$

где c – некоторая постоянная для данной системы весов, выбираемая так, чтобы веса были числами, удобными для вычислений (близкими к единице).

Обозначив $c = \mu^2$, можно представить вес как

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}. \qquad (37)$$

Так как для $\mu = m_i$, $p_i = 1$, μ называют средней квадратической ошибкой единицы веса (ошибкой единицы веса). Это значит, что μ является средней квадратической ошибкой того результата измерения, вес которого равен единице.

На основе формулы (37) можно получить следующие соотношения:

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}; \qquad (38)$$

$$\mu = m_i \sqrt{p_i}; \qquad (39)$$

$$\frac{m_1^2}{m_2^2} = \frac{p_2}{p_1}. \qquad (40)$$

Пример

Угол β измерен n_1 приемами, угол α – n_2 приемами. Установите веса окончательных значений углов β и α, если средняя квадратическая ошибка одного приема $m_\beta = m_\alpha = m = \mu$.

Решение

Окончательными значениями углов будут их средние арифметические результаты из n_i приемов:

$$\overline{\beta} = \frac{[\beta]}{n_1}; \quad \overline{\alpha} = \frac{[\alpha]}{n_2}.$$

По формуле (21) представляем средние квадратические ошибки средних значений углов

$$m_{\overline{\beta}} = \frac{m}{\sqrt{n_1}}; \quad m_{\overline{\alpha}} = \frac{m}{\sqrt{n_2}}.$$

По формуле (40) составим отношения весов и квадратов средних квадратических ошибок:

$$\frac{m_{\overline{\beta}}^2}{m_{\overline{\alpha}}^2} = \frac{p_{\overline{\alpha}}}{p_{\overline{\beta}}}; \quad \frac{p_{\overline{\alpha}}}{p_{\overline{\beta}}} = \frac{m^2 \cdot n_2}{n_1 \cdot m^2} = \frac{n_2}{n_1}$$

– веса окончательных значений углов пропорциональны числу равноточных приемов, которыми измерялись углы.

7.3. Вес функции некоррелированных аргументов

Если известны m_F и μ, вес функции $F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно вычислить по формуле:

$$P_F = \frac{\mu^2}{m_F^2}. \qquad (41)$$

Пусть известны веса аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Разделим левую и правую часть формулы

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 m_n^2$$

на μ^2.

$$m_F^2/\mu^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_1^2/\mu^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 m_2^2/\mu^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 m_n^2/\mu^2,$$

$m_i^2/\mu^2 = 1/p_i$ – обратный вес результата измерения.

Обратный вес функции некоррелированных аргументов находят по формуле:

$$\frac{1}{P_F} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 \frac{1}{p_2} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 \frac{1}{p_n}. \qquad (42)$$

Обратный вес функции некоррелированных аргументов равен сумме произведений квадратов частных производных функции по каждому аргументу на обратные веса соответствующих аргументов.

Пример 1

Угол получен как разность двух направлений. Определите вес угла, приняв вес направления равным единице.

Решение

Установим вид функции: $\beta = a - в$.

Возьмем частные производные от функции β по аргументам a и $в$:

$(\partial\beta/\partial a)_0 = 1$; $(\partial\beta/\partial в)_0 = -1$.

По формуле (42) найдем обратный вес функции:

$$\frac{1}{P_\beta} = \left(\frac{\partial\beta}{\partial a}\right)^2 \frac{1}{p_a} + \left(\frac{\partial\beta}{\partial в}\right)^2 \frac{1}{p_в};$$

$$\frac{1}{P_\beta} = 1 + 1 = 2,$$

$P_\beta = 0{,}5$ – вес угла.

Обратный вес функции линейного вида:

1) $F = k_1x_1 \pm k_2x_2 \pm \ldots \pm k_nx_n$;

$$\frac{1}{P_F} = k_1^2 \frac{1}{p_1} + k_2^2 \frac{1}{p_2} + \ldots + k_n^2 \frac{1}{p_n}; \qquad (43)$$

2) $F = x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$;

$$\frac{1}{P_F} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}; \qquad (44)$$

3) $F = kx$;

$$\frac{1}{P_F} = k^2 \frac{1}{p_x}. \qquad (45)$$

Пример 2

Функция имеет вид: $F = 4x - 3y$. Чему равен обратный вес функции?

Решение

$$\frac{1}{P_F} = 16\frac{1}{p_x} + 9\frac{1}{p_y}.$$

Пример 3

Вес суммы углов пятиугольника, измеренных с одинаковой точностью, принят за единицу. Найти вес одного угла.

Решение

Функция имеет вид: $F = \beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_5$.

Обратный вес функции:

$$\frac{1}{P_F} = 5 \cdot \frac{1}{p_\beta} = 1.$$

Вес угла: $p_\beta = 5$.

Определим вес и среднюю квадратическую ошибку ***среднего весового***.

Среднее весовое вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{[px]}{[p]} = \frac{p_1}{[p]}x_1 + \frac{p_2}{[p]}x_2 + \ldots + \frac{p_n}{[p]}x_n. \qquad (46)$$

Обратный вес линейной функции (46) найдем по формуле (43):

$$\frac{1}{P_{\bar{x}}} = \left(\frac{p_1}{[p]}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{p_2}{[p]}\right)^2 \frac{1}{p_2} + \ldots + \left(\frac{p_n}{[p]}\right)^2 \frac{1}{p_n} = \frac{[p]}{[p]^2} = \frac{1}{[p]}.$$

$$P_{\bar{x}} = [p] \qquad (47)$$

– вес среднего весового равен сумме весов результатов измерений.

$$m_{\bar{x}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} \qquad (48)$$

– средняя квадратическая ошибка среднего весового.

В частном случае, когда $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$ (измерения равноточны), $[p] = n$,

$\bar{x} = \frac{[x]}{n}$ – среднее арифметическое,

$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$ – средняя квадратическая ошибка среднего арифметического.

8. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

8.1. Вывод формулы Гаусса

Обозначим:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – результаты измерений;

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ – истинные ошибки измерений;

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ – веса измерений.

Умножим каждый результат измерения на $\sqrt{p_i}$:

$$x_i' = x_i \cdot \sqrt{p_i}\,.$$

Истинные ошибки измерений также умножатся на $\sqrt{p_i}$:

$$\theta_i' = \theta_i \cdot \sqrt{p_i}\,.$$

Средняя квадратическая ошибка функции x_i' будет равна

$$m_i' = m_i \cdot \sqrt{p_i} = \mu\,.$$

Это значит, что значения x_i' равноточны.

Формула Гаусса (6) для оценки точности равноточных измерений имеет вид:

$$m' = \sqrt{\frac{[(\theta')^2]}{n}}\,.$$

После подстановки значений θ' и m', имеем

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\theta^2]}{n}} \qquad (49)$$

– формула Гаусса оценки точности результатов неравноточных измерений по их истинным ошибкам.

Аналогично определению (5) и в соответствии с формулой (49)

$$\mu^2 = M(p\theta^2)\,. \qquad (50)$$

Для случайных ошибок неравноточных измерений формула Гаусса имеет вид:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}\,. \qquad (51)$$

Для оценки точности результатов измерений по формулам Гаусса часто используют истинные ошибки функций – невязки.

$$\theta_F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = w\,.$$

Если число некоррелированных невязок равно N, то

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_F\theta_F^2]}{N}}\,. \qquad (52)$$

8.2. Оценка точности угловых измерений по невязкам треугольников

Невязка треугольника – функция независимо измеренных углов β_i, вычисляется по формуле:

$$w=\beta_1+\beta_2+\beta_3-180^\circ.$$

Обратный вес этой функции равен

$$\frac{1}{p_w}=3\cdot\frac{1}{p}.$$

Примем вес угла p = 1. Тогда $\mu=m_\beta$, средней квадратической ошибке угловых измерений. По формуле (52) для n треугольников получим

$$m_\beta=\sqrt{\frac{[w^2]}{3n}} \qquad (53)$$

– формула Ферреро оценки точности угловых измерений по некоррелированным невязкам треугольников.

8.3. Оценка точности угловых измерений по невязкам замкнутых фигур

Невязки N замкнутых угловых полигонов с n_i – числом углов в полигоне вычисляются по формуле:

$$w_j=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n^{(i)}-180^\circ\cdot(n_i-2)\ (j=1,2,\ldots,N).$$

Обратный вес этой функции равноточных углов с весами p = 1 равен

$$\frac{1}{p_w}=n_i\cdot\frac{1}{p}=n_i.$$

По формуле (52)

$$\mu=m_\beta=\sqrt{\frac{[(1/n)\cdot w^2]}{N}} \qquad (54)$$

– средняя квадратическая ошибка измерения угла, вычисляемая по некоррелированным невязкам замкнутых полигонов.

8.4. Свойство поправок

Преобразуем формулу поправок:

$$v_i=\bar{x}-x_i=\frac{[px]}{[p]}-x_i.$$

Умножив ее на вес p_i и сложив по столбцам, получим

$$[pv]=[p]\frac{[px]}{[p]}-[px]=0.$$

Поправки обладают свойством:

$$[pv]=0. \qquad (55)$$

Для равноточных измерений $[v]=0$.

8.5. Вывод формулы Бесселя

Известны результаты измерений и их веса

$x_1, x_2, \ldots, x_n$;

$p_1, p_2, \ldots, p_n$.

$\theta_i = x_i - X$ – истинные ошибки измерений;

$v_i = \bar{x} - x_i$ – поправки, при этом $\bar{x} = [px]/[p]$ – среднее весовое.

Сложим левые и правые части формул ошибок и поправок.

$\theta_i + v_i = x_i - X + \bar{x} - x_i = \bar{x} - X = \theta_{\bar{x}}$ – истинная ошибка среднего весового.

$\theta_i = \theta_{\bar{x}} - v_i$; $\theta_i^2 = \theta_{\bar{x}}^2 - 2 \cdot \theta_{\bar{x}} \cdot v_i + v_i^2$.

Умножим полученное выражение на вес p_i и сложим по столбцам.

$[p\theta^2] = [p]\theta_{\bar{x}}^2 - 2 \cdot \theta_{\bar{x}}[pv] + [pv^2] = [p]\theta_{\bar{x}}^2 + [pv^2]$, так как $[pv] = 0$.

Возьмем математическое ожидание от полученного выражения:

$M[p\theta^2] = [M(p\theta^2)] = n\,M(p\theta^2) = n \cdot \mu^2$;

$[p]M(\theta_{\bar{x}}^2) = [p]m^2{}_{\bar{x}} = [p]\mu^2/[p] = \mu^2$;

$M[pv^2] = [M(pv^2)] = n\,M(pv^2)$.

$M(pv^2)$ заменим оценкой $\overline{M}(pv^2) = \lfloor pv^2 \rfloor / n$.

$n\overline{M}(pv^2) = n[pv^2]/n = [pv^2]$. $n\mu^2 = \mu^2 + [pv^2]$;

Отсюда

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} \qquad (56)$$

– формула Бесселя оценки точности неравноточных измерений.

Здесь μ – оценка среднего квадратического отклонения σ_0,

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{M[pv^2]}{n-1}}. \qquad (57)$$

9. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Выполнены двойные равноточные измерения однородных величин:

$x_1, x_2, ..., x_n$;

$x'_1, x'_2, ..., x'_n$.

По этим данным составим разности $d_i = x_i - x'_i$.

Истинная ошибка разности $\theta_d = d$ равна самой разности. Средняя квадратическая ошибка разности

$$m_d = \sqrt{m^2 + m^2} = m\sqrt{2},$$

где

$$m = m_d / \sqrt{2} \qquad (58)$$

– средняя квадратическая ошибка измерения.

Зная истинную ошибку разности, можно по формуле Гаусса (6) найти среднюю квадратическую ошибку разности

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}},$$

а затем по формуле (58) перейти к средней квадратической ошибке результата измерения

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \qquad (59)$$

Систематические ошибки в разностях в основном погашаются. Возможно наличие лишь остаточной систематической ошибки δ. Пусть в разностях присутствуют случайные и остаточная систематическая ошибки:

$$d_i = \Delta_i + \delta; \quad \frac{[d]}{n} = \frac{[\Delta]}{n} + n\delta / n; \quad \frac{[\Delta]}{n} = 0; \quad \delta = \frac{[d]}{n}.$$

Остаточную систематическую ошибку исключают из разностей: $d'_i = d_i - \delta$.

После исключения δ разности приобретают свойство поправок

$[d'] = [d] - n[d] / n = 0$.

Поэтому для оценки точности по разностям d'_i используют формулу Бесселя (8):

$$m_d = \sqrt{\frac{[(d')^2]}{n-1}}.$$

Средняя квадратическая ошибка результата измерения будет вычисляться по формуле:

$$m = \sqrt{\frac{[(d'^2]}{2(n-1)}}. \qquad (60)$$

По каждой паре двойных измерений вычисляют среднее арифметическое:

$$\bar{x}_i = \frac{x_i + x_i'}{2}.$$

Средняя квадратическая ошибка среднего из пары наблюдений будет равна

$$m_{\bar{x}}^{(i)} = m_i / \sqrt{2}.$$

Если двойные измерения выполнены с весами p_i (в паре равноточные)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ с p_i; $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ с p_i,

то обратный вес разности будет равен

$$1/p_d^{(i)} = 1/p_i + 1/p_i = 2/p_i; \quad p_d^{(i)} = p_i/2. \qquad (61)$$

По формуле Гаусса (52),

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d^2]}{n}}.$$

С учетом формулы (61),

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}} \qquad (62)$$

– средняя квадратическая ошибка единицы веса.

Если измерения неравноточны, остаточную систематическую ошибку вычисляют как среднее весовое

$$\delta = \frac{[pd]}{[p]} \qquad (63)$$

и исключают из разностей: $d_i' = d_i - \delta$.

Оценку точности измерений в этом случае делают по формуле:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p(d')^2]}{2(n-1)}}. \qquad (64)$$

Обратный вес и средняя квадратическая ошибка среднего из пары измерений:

$$1/p_{\bar{x}} = 1/4\,(1/p_i + 1/p_i) = 1/2p_i;$$

$$m_{\bar{x}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}.$$

Для оценки значимости остаточной систематической ошибки можно использовать формулу из [3]:

$$\left|[d]\right| \le 2{,}5\left[\left|d\right|\right]/\sqrt{n}. \qquad (65)$$

Если данное неравенство выполняется, то остаточная систематическая ошибка отсутствует и оценку точности измерений следует выполнять по формулам (59) и (62). Если неравенство не выполняется, следует вычислить и исключить из разностей остаточную систематическую ошибку. Оценку точности выполнять по формулам (60) и (64).

Разности двойных измерений не отражают влияния всех источников ошибок каждого отдельного измерения. Систематические ошибки в разностях в большей части погашаются. Оценка точности по формулам (59), (60) и (62), (64) отражает влияние лишь случайных ошибок. Значения средних квадратических ошибок, вычисленных по разностям двойных измерений, оказываются преуменьшенными.

Формулы Бесселя (8), (56) оценки точности по поправкам (по внутренней сходимости) отражают конкретные условия измерений на станции. Недостатком их является малый объем используемой информации. Односторонне действующие ошибки в этих формулах погашаются. Поэтому средние квадратические ошибки преуменьшены.

Формулы Гаусса (6), (7), (49), (51), (52) отражают некоторые средние условия измерений в геодезической сети. Они надежны, когда истинные ошибки функций – невязки не содержат ошибок исходных данных и их число достаточно велико.

10. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ИЗМЕРЕНИЙ ОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Если одна и та же величина измерена n раз, необходимо выполнить математическую обработку этих измерений:

определить наиболее надежное значение измеренной величины;

оценить точность результатов измерений;

оценить точность окончательного результата.

Выполнены неравноточные многократные измерения одной и той же величины: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с весами $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Окончательным, наиболее надежным значением измеренной величины будет среднее весовое $\bar{x} = [px]/[p]$.

На практике для упрощения вычислений вводят приближенное значение измеренной величины – x_0, так, что $x_i = x_0 + \varepsilon_i$.

$\varepsilon_i = x_i - x_0$ – остатки.

Принимают $x_0 = x_{min}$, наименьшему из результатов измерений. С учетом этого, получим практическую формулу для вычисления среднего весового:

$$\bar{x} = \frac{p_1(x_0+\varepsilon_1) + p_2(x_0+\varepsilon_2) + \ldots + p_n(x_0+\varepsilon_n)}{[p]} = \frac{[p]x_0 + [p\varepsilon]}{[p]};$$

$$\bar{x} = x_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}. \qquad (66)$$

Для контроля вычислений определяют ошибку округления среднего весового. С этой целью величину $\bar{x}$ вычисляют с двумя лишними десятичными знаками, по сравнению с результатами измерений. Это будет $\bar{x}_{точ}$ ($\bar{x}_{точное}$). Округлив один запасной знак, получают $\bar{x}_{пр}$ ($\bar{x}_{принятое}$).

$$\Delta_{ок} = \bar{x}_{пр} - \bar{x}_{точ} \qquad (67)$$

– ошибка округления.

Затем вычисляют поправки к результатам измерений:

$$v_i = \bar{x}_{пр} - x_i. \qquad (68)$$

Получим контрольную формулу:

$$v_i = \Delta_{ок} + \bar{x}_{точ} - x_i.$$

Умножим левую и правую часть этого равенства на вес p_i и сложим по столбцам:

$$[pv] = [p]\Delta_{ок} + [p][px]/[p] - [px]; \; [pv] = [p]\Delta_{ок}.$$

$$[pv] = [p]\Delta_{ок} \qquad (69)$$

– контроль вычисления среднего весового $\bar{x}$ и v_i.

Получим контрольную формулу для $[pv^2]$:

$$v_i = x_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]} - x_0 - \varepsilon_i = \frac{[p\varepsilon]}{[p]} - \varepsilon_i.$$

Возведем последнее равенство в квадрат, умножим на веса p_i и сложим по столбцам:

$$[pv^2]=[p]\frac{[p\varepsilon]^2}{[p]^2}-2\frac{[p\varepsilon]}{[p]}[p\varepsilon]+[p\varepsilon^2].$$

$$\left[pv^2\right]=\left[p\varepsilon^2\right]-\frac{[p\varepsilon]^2}{[p]} \qquad (70)$$

– контроль $[pv^2]$.

Оценка точности результатов измерений производится по формуле Бесселя

$$\mu=\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$$

– средняя квадратическая ошибка единицы веса.

Оценка точности окончательного результата:

$$m_{\bar{x}}=\frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$$

– средняя квадратическая ошибка среднего весового.

Доверительное оценивание неизвестных параметров. Доверительный интервал для математического ожидания вычисляется по формуле:

$$P(\bar{x}-t_\beta m_{\bar{x}} \prec M_x \prec \bar{x}+t_\beta m_{\bar{x}})=\beta. \qquad (71)$$

Здесь $\bar{x}=\bar{x}_{np}$ – среднее весовое;

$m_{\bar{x}}$ – средняя квадратическая ошибка среднего весового;

t_β – аргумент функции распределения Стьюдента β = $\Phi'(t_\beta)$ с $r=n-1$ числом степеней свободы.

$$P(\gamma_1\mu < \sigma_0 < \gamma_2\mu) = \beta \qquad (72)$$

– доверительный интервал для среднего квадратического отклонения единицы веса. Здесь μ – средняя квадратическая ошибка единицы веса, γ_1 и γ_2 в таблице по аргументам r = n – 1 и β.

Для равноточных многократных измерений одной величины в приведенных формулах $p_i=1$; $[p]=n$.

$$\bar{x}=\frac{[x]}{n}=x_0+\frac{[\varepsilon]}{n}$$

– окончательное значение измеренной величины – среднее арифметическое.

$$[v]=n\,\Delta_{ок}$$

– контроль вычисления поправок.

$$[v^2]=[\varepsilon^2]-\frac{[\varepsilon]^2}{n}$$

– контроль $[v^2]$.

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$$

– средняя квадратическая ошибка результата измерения (формула Бесселя).

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

– средняя квадратическая ошибка окончательного результата – среднего арифметического.

Пример

Выполнены многократные равноточные измерения линии (табл. 2). Требуется выполнить их математическую обработку.

Таблица 2. Измерения линии

x, м	ε, см	$ε^2$	v, см	v^2
20,02	1	1	0,5	0,25
04	3	9	–1,5	2,25
03	2	4	–0,5	0,25
01	0	0	1,5	2,25

$[ε] = 6$ $[ε^2] = 14$ $[v] = 0$ $[v^2] = 5{,}0$

$x_0 = 20{,}01$;

$x_{точ} = 20{,}01 + 0{,}06 / 4 = 20{,}0250$ м;

$x_{пр} = 20{,}025$ м; $\Delta_{ок} = 0{,}00$ см; $[v] = n\,\Delta_{ок} = 0$ – контроль.

$$[v^2] = [ε^2] - \frac{[ε]^2}{n} = 14 - 36/4 = 5 \text{ – контроль.}$$

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = 1{,}29 \text{ см}$$

– средняя квадратическая ошибка результата измерения.

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = 0{,}64 \text{ см}$$

– средняя квадратическая ошибка окончательного результата (среднего арифметического).

Доверительный интервал для математического ожидания

$$P\{\bar{x} - t_β\, m_{\bar{x}} \prec M(X) \prec \bar{x} + t_β\, m_{\bar{x}}\} = β.$$

Для $β = 0{,}95$ и числа степеней свободы $r = n - 1 = 3$, $t_β = 3{,}2$ (табл. П.1).

$$P\{20{,}250 \text{ м} - 3{,}2 \cdot 0{,}64 \text{ см} \prec M(X) \prec 20{,}250 \text{ м} + 3{,}2 \cdot 0{,}64 \text{ см}\} = 0{,}95$$

;

$$P\{20{,}230 \prec M(X) \prec 20{,}270\} = 0{,}95.$$

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения

$$P\{\gamma_1 m \prec \sigma \prec \gamma_2 m) = \beta.$$

Для β = 0,95 и $r = n - 1 = 3$, $\gamma_1 = 0{,}57$; $\gamma_2 = 3{,}7$ (табл. П.2).

$$P\{0{,}57 \cdot 1{,}29 \prec \sigma \prec 3{,}7 \cdot 1{,}29) = 0{,}95;$$

$$\mathrm{P}\{0{,}74 \prec \sigma \prec 4{,}77) = 0{,}95.$$

Если число измерений $n \geq 20$, при построении доверительных интервалов может быть использован нормальный закон распределения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Большаков, В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений / В.Д. Большаков, П.А. Гайдаев. – М.: Недра, 1977. – 367 с.
2. Большаков, В.Д. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1984. – 352 с.
3. Большаков, В.Д. Уравнивание геодезических построений: справочное пособие / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе, В.В. Голубев. – М.: Недра, 1989. – 413 с.
4. Лесных, Н.Б. Основы теории вероятностей и математической статистики. Теория ошибок измерений: учеб. пособие для студентов заочного факультета / Н.Б. Лесных. – Новосибирск: СГГА, 1992. – 75 с.
5. Лесных, Н.Б. Теория математической обработки геодезических измерений. Теория ошибок измерений с элементами теории вероятностей: метод. указания / Н.Б. Лесных. – Новосибирск: СГГА, 2002. – 56 с.
6. Лесных, Н.Б. Законы распределения случайных величин в геодезии / Н.Б. Лесных. – Новосибирск: СГГА, 2005. – 128 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Производные

$c' = c$; 2) $x' = 1$; 3) $(ax + в)' = a$; 4) $(cx)' = c$; 5) $(x^n)' = n\,x^{n-1}$; 6) $[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]' = f_1'(x) + f_2'(x) - f_3'(x)$; 7) $(uv)' = uv' + vu'$; 8) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$; 9) $(\ln x)' = 1/x$; 10) $(\lg x)' = M\,1/x$; ($M = 0{,}4343...$); 11) $(e^x)' = e^x$; 12) $(a^x)' = a^x \ln a$; 13) $(\sin x)' = \cos x$; 14) $(\cos x)' = -\sin x$; 15) $(\mathrm{tg}\,x)' = 1/\cos^2 x$; 16) $(\mathrm{ctg}\,x)' = -1/\sin^2 x$; 17) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;18) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Таблица П.1. Коэффициенты Стьюдента t_β

r / β	0,90	0,95	0,99
1	6,3	12,7	63,7
2	2,9	4,3	9,9
3	2,4	3,2	5,8
4	2,1	2,8	4,6
5	2,0	2,6	4,0
6	1,9	2,4	3,7

$r = n - 1$ – число степеней свободы; $\beta = \Phi'(t_\beta)$ – доверительная вероятность.

Таблица П.2. Доверительные интервалы для σ_x

β	0,99		0,95		0,90	
r / γ	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
2	0,43	14,1	0,52	6,3	0,58	4,4
3	0,48	6,5	0,57	3,7	0,62	2,9
4	0,52	4,4	0,60	2,9	0,65	2,4
5	0,55	3,5	0,62	2,5	0,67	2,1
6	0,57	3,0	0,64	2,2	0,69	1,9